Sự khả tích trên hình hộp

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 09 tháng 10 năm 2025

Nhắc lại xấp xỉ dưới và xấp xỉ trên

Gọi $H(P)$ là tập hợp tất cả các hình hộp con ứng với phép chia P.

Cho hình hộp I và hàm $f : I \to \mathbb{R}$. Gọi

$$L(f, P) = \sum_{R \in H(P)} \left(\inf_R f \right) |R| \qquad \text{và} \qquad U(f, P) = \sum_{R \in H(P)} \left(\sup_R f \right) |R|$$

lần lượt là tổng dưới (hay xấp xỉ dưới) và tổng trên (hay xấp xỉ trên).

Nhắc lại: Sự mịn hơn của một phép chia

Định nghĩa

Cho $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ là một phép chia của đoạn $[a, b]$. Cho $c \in [x_{i-1}, x_i]$. Gọi P' là một phép chia từ P bằng cách thêm c vào P để thu được

$$P' = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, c, x_i, \ldots, x_n\}.$$

Ta nói phép chia P' mịn hơn (refinement) phép chia P. Ngoài ra, nếu Q là một tập hữu hạn sao cho

$$P \subset Q \subset [a, b],$$

thì phép chia Q cũng được gọi là mịn hơn phép chia P.

Bổ đề (Chia mịn hơn thì tổng dưới tăng và tổng trên giảm)

Nếu phép chia P' là mịn hơn phép chia P thì $L(f, P') \geq L(f, P)$ và $U(f, P') \leq U(f, P)$.

Chứng minh.

Vì phép chia P' là mịn hơn phép chia P, nên mỗi hình hộp con R' của phép chia P' nằm trong một hình hộp con R của phép chia P, và do đó, $\inf_{R'} f \geq \inf_R f$. Vì vậy,

$$\begin{aligned}\sum_{R'\subset R, R'\in H(P')} \left(\inf_{R'} f\right)|R'| &\geq \sum_{R'\subset R, R'\in H(P')} \left(\inf_{R} f\right)|R'| \\ &= \inf_R f \sum_{R'\subset R, R'\in H(P')} |R'| \\ &= \left(\inf_R f\right)|R|.\end{aligned}$$

Lấy tổng hai vế của bất đẳng thức trên theo tất cả hình hộp con R của P, ta được

$$L(f, P') \geq L(f, P).$$

Lập luận tương tự để kết luận rằng $U(f, P') \leq U(f, P)$. □

Ví dụ

Xét hàm $f(x, y) = x + 2y$ trên $[0, 4] \times [0, 2]$. Với phép chia P' thành 8 hình chữ nhật con, nghĩa là

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4,$$
$$y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 2,$$

ta tính được tổng dưới và tổng trên là:

$L(f, P')$
$= [f(0,0) + f(1,0) + f(2,0) + f(3,0) + f(0,1) + f(1,1) + f(2,1) + f(3,1)] \cdot 1 \cdot 1$
$= 20,$
$U(f, P')$
$= [f(1,1) + f(2,1) + f(3,1) + f(4,1) + f(1,2) + f(2,2) + f(3,2) + f(4,2)] \cdot 1 \cdot 1$
$= 44.$

Ta thấy $P \subset P'$ nên P' mịn hơn P và

$$L(f, P) \leq L(f, P') \leq U(f, P') \leq U(f, P).$$



Bổ đề (Xấp xỉ dưới $\leq$ xấp xỉ trên)

Nếu P và P' là hai phép chia bất kỳ của cùng một hình hộp thì $L(f,P) \leq U(f,P')$.

Ghi chú:

Một hệ quả là chặn trên nhỏ nhất của tập hợp tất cả các xấp xỉ dưới $\sup_P L(f,P)$ và chặn dưới lớn nhất của tập hợp tất cả các xấp xỉ trên $\inf_P U(f,P)$ tồn tại, và

$$\sup_P L(f,P) \leq \inf_P U(f,P).$$

Chứng minh

Với hai phép chia P và P' bất kỳ thì luôn có một phép chia P'' mịn hơn cả P và P', chẳng hạn nếu

$$P = \prod_{i=1}^{n} P_i \quad \text{và} \quad P' = \prod_{i=1}^{n} P_i',$$

thì có thể lấy $P'' = \prod_{i=1}^{n} P_i''$, với $P_i'' = P_i \cup P_i'$. Khi đó, ta có

$$L(f, P) \leq L(f, P'') \leq U(f, P'') \leq U(f, P').$$

Đây là điều phải chứng minh. 

Định nghĩa tích phân Riemann

Cho hình hộp I. Hàm $f : I \to \mathbb{R}$ là khả tích (integrable) nếu f bị chặn và $\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$. Nếu f khả tích thì tích phân của f được định nghĩa là số thực:

$$\int_I f = \sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P),$$

nghĩa là *tích phân là số thực duy nhất nằm giữa tất cả các tổng dưới và tất cả các tổng trên.*

Ta cũng có thể dùng ký hiệu:

$$L_f \equiv L(f) := \sup_P L(f,P), \qquad U_f \equiv U(f) := \inf_P U(f,P).$$

Ghi chú

Ta vẫn có định nghĩa của *khả tích Riemann* dựa trên tổng Riemann:

Hàm số f là khả tích Riemann trên hình hộp I nếu có một số thực, gọi là tích phân Riemann của f trên I, ký hiệu là $\int_I f$, thỏa với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu độ mịn của P nhỏ hơn δ, thì với mọi cách chọn điểm đại diện x_R thuộc các hình hộp con R của P, ta có:

$$\left| \sum_R f(x_R)|R| - \int_I f \right| < \epsilon.$$

Ví dụ

Nếu c là hằng số thì

$$\int_I c = c|I|,$$

vì $L(c, P) = c = U(c, P)$ với mọi phép chia P.

Ví dụ

Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{nếu } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \textit{nếu } x = 0 \end{cases}$$

là khả tích Riemann, và

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Đặt $P = \{I_1, I_2, \ldots, I_m\}$ là phân hoạch của đoạn $[0,1]$. Vì $f(x) = 0$ với mọi $x > 0$ nên ta có

$$\sup_{I_k} f = 0 \qquad \text{và} \qquad \inf_{I_k} f = 0 \qquad \forall k = 2, 3, \ldots, n.$$

Xét $I_1 = [0, x_1]$ với $0 < x_1 \leq 1$. Vì $f(0) = 1$ và $f(x) = 0$ với $0 < x \leq x_1$, nên ta có $\sup_{I_1} f = 1$ và $\inf_{I_1} f = 0$, nên

$$L(f, P) = \sum_{I_k} \left(\inf_{I_k} f \right) |I_k| = 0,$$

$$U(f, P) = \sum_{I_k} \left(\sup_{I_k} f \right) |I_k| = x_1 \cdot 1 = x_1$$

với mọi phép chia P. Vì vậy, ta có:

$$\sup_P L(f, P) = 0 \quad \text{và} \quad \inf_P U(f, P) = 0.$$

Do đó, f khả tích và

$$\int_{[0,1]} f = \sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P) = 0.$$



Ghi chú: Ví dụ này thể hiện một hàm không liên tục vẫn có thể khả tích Riemann nếu hàm số đó chỉ không liên tục "tại một số điểm".

Ví dụ

Xét hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *bởi*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Hỏi hàm $f(x)$ *có khả tích Riemann hay không?*

Hàm f không khả tích Riemann. Thật vậy, với bất kỳ phép chia $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ của đoạn $[0,1]$, ta có

$$\sup_{P_k} f = 1 \qquad \text{và} \qquad \inf_{P_k} f = 0$$

vì bất kỳ một khoảng con nào có chiều dài dương đều chứa cả số hữu tỉ và vô tỉ.

Vì vậy, ta được

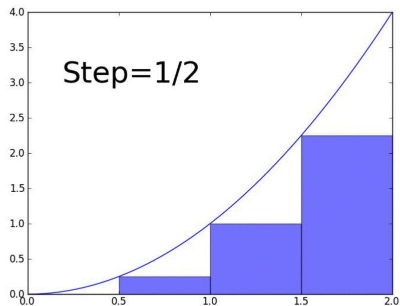
$$U(f,P) = 1 \qquad \text{và} \qquad L(f,P) = 0$$

với tất cả các phép chia P, nên

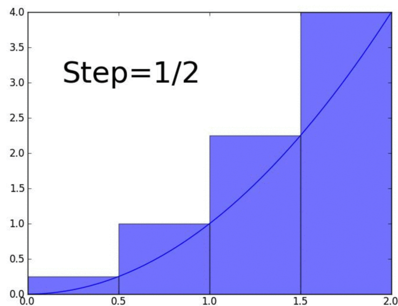
$$\sup_P L(f,P) = 0 \neq \inf_P U(f,P) = 1.$$

Đây là điều cần chứng minh. 

Xấp xỉ của hàm $f(x) = x^2$

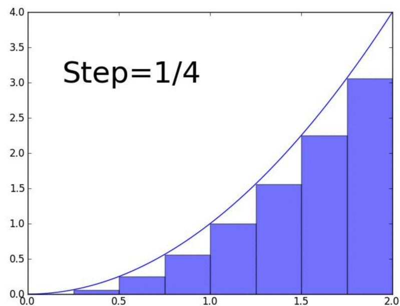


Hình: Xấp xỉ dưới với $n = 2$

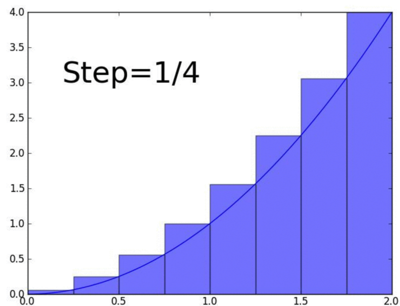


Hình: Xấp xỉ trên với $n = 2$

Xấp xỉ của hàm $f(x) = x^2$

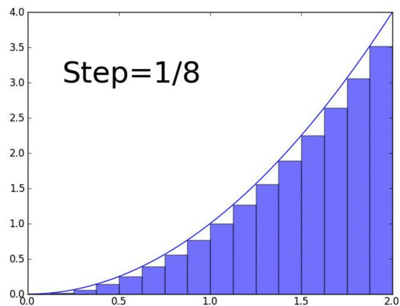


Hình: Xấp xỉ dưới với $n = 4$

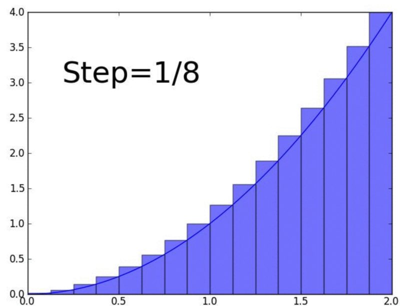


Hình: Xấp xỉ trên với $n = 4$

Xấp xỉ của hàm $f(x) = x^2$

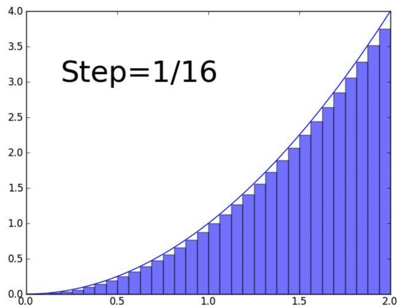


Hình: Xấp xỉ dưới với $n = 8$

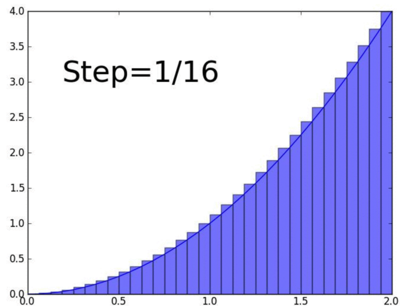


Hình: Xấp xỉ trên với $n = 8$

Xấp xỉ của hàm $f(x) = x^2$

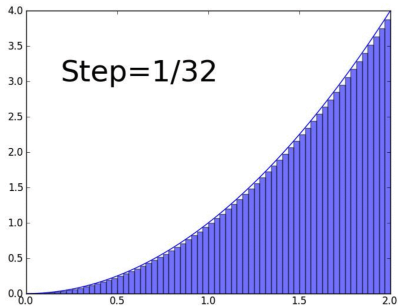


Hình: Xấp xỉ dưới với $n = 16$

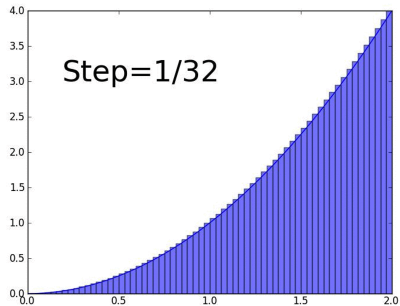


Hình: Xấp xỉ trên với $n = 16$

Xấp xỉ của hàm $f(x) = x^2$

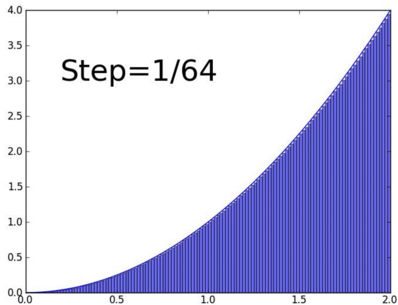


Hình: Xấp xỉ dưới với $n = 32$

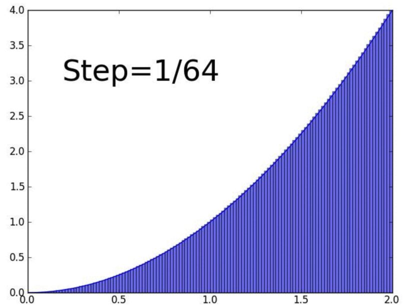


Hình: Xấp xỉ trên với $n = 32$

Xấp xỉ của hàm $f(x) = x^2$



Hình: Xấp xỉ dưới với $n = 64$



Hình: Xấp xỉ trên với $n = 64$

- Khi $n = 1$, ta có tích phân của hàm một biến đã khảo sát trong Giải tích 1, thường được viết là

$$\int_{[a,b]} f \qquad \text{hay} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Như vậy, ta thừa hưởng tất cả các kết quả về tích phân hàm một biến đã có trong Giải tích 1, bao gồm công thức Newton–Leibniz để tính tích phân.

- Khi $n = 2$, ta có tích phân bội 2 (tích phân kép), thường được viết là

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}A \qquad \text{hay} \qquad \iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- Khi $n = 3$, ta có tích phân bội 3, thường được viết là

$$\iiint_I f(x,y,z)\,\mathrm{d}V \qquad \text{hay} \qquad \iiint_I f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Ghi chú về tích phân Darboux và tích phân Riemann

Tích phân Darboux được định nghĩa dựa trên xấp xỉ trên và xấp xỉ dưới như đã thảo luận ở phần trước.

Tích phân Darboux tương đương với tích phân Riemann, nghĩa là một hàm là khả tích Darboux khi và chỉ khi hàm đó khả tích Riemann.

Vì định nghĩa của tích phân Darboux dễ được ứng dụng trong tính toán và chứng minh so với định nghĩa của tích phân Riemann (thông qua tổng Riemann), nên nhiều sách giáo khoa hiện nay đã sử dụng xấp xỉ trên và xấp xỉ dưới thay cho tổng Riemann thật sự để định nghĩa tích phân Riemann.

Mệnh đề 1.6 (Điều kiện Cauchy cho sự khả tích)

Cho f bị chặn trên hình hộp I. Khi đó, hàm f là khả tích trên I nếu và chỉ nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại phép chia P của I sao cho

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

Ý nghĩa: Một hàm là khả tích khi và chỉ khi tồn tại một phép chia sao cho xấp xỉ trên và xấp xỉ dưới có thể gần nhau tùy ý.

Chứng minh

($\Rightarrow$) Giả sử ta có hàm f khả tích. Cho $\epsilon > 0$, có phép chia P và P' sao cho

$$L(f,P) > -\frac{\epsilon}{2} + \int_I f$$

và

$$U(f,P') < \frac{\epsilon}{2} + \int_I f$$

bởi tính chất của sup và inf. Lấy P'' mịn hơn cả P và P'. Khi đó,

$$U(f,P'') - L(f,P'') \leq U(f,P') - L(f,P) < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Giả sử với $\epsilon > 0$ cho trước bất kỳ, tồn tại một phép chia P sao cho

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$

Điều này cũng dẫn đến

$$U(f,P) < \sup_P L(f,P) + \epsilon,$$

nên

$$\inf_P U(f,P) < \sup_P L(f,P) + \epsilon \iff 0 \leq \inf_P U(f,P) - \sup_P L(f,P) < \epsilon.$$

Ở đây, ta dùng hệ quả của bổ đề: xấp xỉ dưới $\leq$ xấp xỉ trên.

Vì điều này đúng với mọi $\epsilon > 0$, ta lấy giới hạn $\epsilon \to 0$ để kết luận rằng

$$\inf_P U(f,P) = \sup_P L(f,P),$$

nên f khả tích trên I. 

Hệ quả

Một hàm bị chặn f khả tích khi và chỉ khi tồn tại một dãy các phép chia $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0,$$

và khi đó, ta có được

$$\int f=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}L(f,P_n).$$

Chứng minh

($\Rightarrow$) Giả sử f khả tích. Điều kiện Cauchy cho sự khả tích (Mệnh đề 1.1.4) cho ta một phép chia P_n, với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$0 \leq U(f, P_n) - L(f, P_n) < \frac{1}{n},$$

nên

$$\lim_{n\to\infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0.$$

($\Leftarrow$) Giả sử ta có

$$\lim_{n\to\infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0.$$

Với $\epsilon > 0$ bất kỳ, ta có một phép chia P_n, $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) < \epsilon.$$

Từ đó, theo điều kiện Cauchy cho sự khả tích, ta kết luận rằng f khả tích với

$$\sup_{P_n} L(f, P_n) = \inf_{P_n} U(f, P_n).$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\int f = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n).$$

Ta có:

$$0 \leq U(f, P_n) - \inf_{P_n} U(f, P_n) = U(f, P_n) - \sup_{P_n} L(f, P_n) \leq U(f, P_n) - L(f, P_n).$$

Lấy giới hạn hai vế khi $n \to \infty$, vì vế phải tiến về 0, nên theo định lý kẹp, ta được

$$\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \inf_{P_n} U(f, P_n) = \int f,$$

và

$$\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) - \lim_{n\to\infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = \int f.$$

Đây là điều cần chứng minh. 

Ví dụ

Cho hàm số $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ *được định nghĩa bởi*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Với mọi $\epsilon > 0$*, xét phân hoạch* $P_\epsilon = \{0, 1 - \epsilon, 1, 2\}$ *của đoạn* $[0, 2]$*. Tính* $U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon)$*? Hàm* f *có khả tích trên* $[0, 2]$ *không? Giải thích. Nếu có, hãy tính* $\int_{[0,2]} f$*.*

Ta tính:

$$\begin{aligned}
U(f, P_\epsilon) &= (1-\epsilon) \sup_{[0,1-\epsilon]} f + \epsilon \sup_{[1-\epsilon,1]} f + 1 \cdot \sup_{[1,2]} f \\
&= (1-\epsilon) \cdot (1-\epsilon)^2 + \epsilon \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\
&= (1-\epsilon)^3 + \epsilon, \\
L(f, P_\epsilon) &= (1-\epsilon) \inf_{[0,1-\epsilon]} f + \epsilon \inf_{[1-\epsilon,1]} f + 1 \cdot \inf_{[1,2]} f \\
&= (1-\epsilon) \cdot 0 + \epsilon \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Như vậy,

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) = (1-\epsilon)^3 + \epsilon = 1 - 2\epsilon + 3\epsilon^2 - \epsilon^3.$$

Ta không thể kết luận được điều gì về sự khả tích của f sử dụng phép chia P_ϵ đã cho.

Ta sẽ chứng minh hàm f khả tích trên $[0,2]$. Thật vậy, cho $\epsilon > 0$ và chọn $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $\frac{1}{n} < \epsilon$. Chọn phân hoạch của đoạn $[0,2]$ như sau:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1, 2\right\}.$$

Ta tính xấp xỉ trên và dưới:

$$U(f, P_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sup_{P_i} f + 1 \cdot \sup_{[1,2]} f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} + 1 \cdot 0 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2,$$

$$L(f, P_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \inf_{P_i} f + 1 \cdot \inf_{[1,2]} f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(i-1)^2}{n^2} + 1 \cdot 0 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-2} i^2.$$

Vì vậy, với $n \geq 1$, ta có ước tính

$$\begin{aligned} U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{n^2 + (n-1)^2}{n^3} = \frac{2n^2 - 2n + 1}{n^3} &= \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \\ &< \frac{5}{n} < 5\epsilon. \end{aligned}$$

Do đó, f khả tích trên $[0, 2]$, và

$$\int_{[0,2]} f = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Đây là kết quả cần tìm. □

Tính chất của tích phân - Mệnh đề 1.7

Nếu f và g khả tích trên hình hộp I thì

1. $f+g$ khả tích và
$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g.$$
2. Với mọi số thực c thì cf khả tích và
$$\int_I cf = c\int_I f.$$
3. Nếu $f \leq g$ thì
$$\int_I f \leq \int_I g.$$

Chứng minh $f+g$ khả tích và $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$

Với một phép chia P của I, trên một hình hộp con R ta có

$$\inf_R f + \inf_R g \leq f(x) + g(x), \quad \forall x \in R.$$

Suy ra $\inf_R f + \inf_R g \leq \inf_R (f+g)$. Do đó, ta có

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P).$$

Cho $\epsilon > 0$. Ta có phép chia P và P' lần lượt sao cho

$$L(f,P) > \int_I f - \epsilon \qquad \text{và} \qquad L(g,P') > \int_I g - \epsilon.$$

Đặt P'' là phép chia mịn hơn P và P', nên ta có

$$L(f, P'') \geq L(f, P) > \int_I f - \epsilon,$$
$$L(g, P'') \geq L(g, P') > \int_I g - \epsilon.$$

Do đó,

$$L(f+g, P'') \geq L(f, P'') + L(g, P'') > \int_I f + \int_I g - 2\epsilon.$$

Tương tự, ta có phép chia Q sao cho

$$U(f+g, Q) \leq U(f, Q) + U(g, Q) < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon.$$

Lấy phép chia Q' mịn hơn cả P'' và Q, ta được

$$\int_I f + \int_I g - 2\epsilon < L(f+g, Q') \leq U(f+g, Q') < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon.$$

Hệ thức này dẫn tới $U(f+g, Q') - L(f+g, Q') < 4\epsilon$, nên $f+g$ khả tích. Ngoài ra,

$$\int_I f + \int_I g - 2\epsilon < \int_I (f+g) < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0,$$

nên $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$. 

Chứng minh cf khả tích và $\int_I cf = c\int_I f$

Nếu $c = 0$ thì đẳng thức luôn đúng. Giả sử $c > 0$. Cho $\epsilon > 0$.

Vì f khả tích nên tồn tại một phép chia P của hình hộp I sao cho

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\epsilon}{c}.$$

Vì

$$L(cf, P) = \sum_{R \in H(P)} \left(\inf_R cf\right) |R| = c \left[\sum_{R \in H(P)} \left(\inf_R f\right) |R|\right] = cL(f, P),$$

$$U(cf, P) = \sum_{R \in H(P)} \left(\sup_R cf\right) |R| = c \left[\sum_{R \in H(P)} \left(\sup_R f\right) |R|\right] = cU(f, P),$$

nên

$$U(cf, P) - L(cf, P) = cU(f, P) - cL(f, P) < \epsilon,$$

nghĩa là cf khả tích trên I.

Để chứng minh $\int_I cf = c\int_I f$, trước hết từ bđt trong phần chứng minh trước:

$$L(f,P) > \int_I f - \frac{\epsilon}{c},$$

ta được

$$\int_I cf \geq L(cf,P) = cL(f,P) > c\int_I f - \epsilon.$$

Tương tự, ta có

$$\int_I cf \leq U(cf,P) = cU(f,P) < c\int_I f + \epsilon,$$

nên

$$c\int_I f - \epsilon < \int_I cf \leq c\int_I f + \epsilon.$$

Lấy giới hạn $\epsilon \to 0$ để thu được $\int_I cf = c\int_I f$ với mọi $c > 0$.

Để chứng minh đẳng thức đúng cho $c < 0$, ta chỉ cần chứng minh

$$\int_I (-f) = -\int_I f.$$

Cho $\epsilon > 0$. Vì f khả tích nên tồn tại một phép chia P của hình hộp I sao cho

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} U(-f,P) - L(-f,P) &= \left[\sum_{R\in H(P)} \left(\sup_R(-f)\right)|R|\right] - \left[\sum_{R\in H(P)} \left(\inf_R(-f)\right)|R|\right] \\ &= -\left[\sum_{R\in H(P)} \left(\inf_R f\right)|R|\right] + \left[\sum_{R\in H(P)} \left(\sup_R f\right)|R|\right] \\ &= -L(f,P) + U(f,P) < \epsilon, \end{aligned}$$

nên $-f$ khả tích trên I.

Vì f và $-f$ khả tích trên I nên ta thu được kết quả:

$$\int_I (-f) = \sup_P L(-f, P) = -\inf_P U(f, P) = -\int_I f.$$

Trở lại với trường hợp $c < 0$, ta có:

$$\int_I (cf) = \int_I (-c)(-f) = -c \int_I (-f) = -c \left(-\int_I f \right) = c \int_I f. \qquad \square$$

Liên tục thì khả tích

Định lý (2.1)

Một hàm liên tục trên một hình hộp thì khả tích trên đó.

Đây là điều kiện đủ cho sự khả tích mà ta sẽ sử dụng thường xuyên.

Để chứng minh định lý trên, ta sẽ sử dụng những kết quả sau từ môn Giải tích 2:

- Một tập con của $\mathbb{R}^n$ là compắc khi và chỉ khi nó bị đóng và bị chặn.
- Một hàm thực liên tục trên một tập compắc của $\mathbb{R}^n$ thì liên tục đều.
- Một hàm thực liên tục trên một tập compắc thì bị chặn.